Математика 2023-24
9 класс
Решения задач

1. Решите в натуральных числах уравнение x^2-y^2=2023.

Решение.

Уравнение можно записать в виде (x-y)(x+y)=7*17*17. Тогда, так как при натуральных x и y всегда x-y<x+y, то возможные случаи:

x-y=1, x+y=2023

x-y=7, x+y=289

x-y=17, x+y=119

Откуда получаем пары (1012, 1011), (148, 141), (68, 51)

Ответ: (1012, 1011), (148, 141), (68, 51).

Указания. Верное решение – 7 баллов. Подбором найдены все или часть решений, без доказательства, что других решений нет - 1 балл. При наличии верных решений, если указаны решения, содержащие отрицательные значения переменных, - минус 1 балл .

2. Диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне и является биссектрисой одного из углов трапеции. Найдите отношение длин оснований трапеции.

Решение.

Пусть ABCD – данная трапеция, BC||AD, BC<AD, AC⊥CD, ∠DAC=∠BAC.

Опустим из вершины B перпендикуляр BK к AC.

Так как BC||AD, то ∠DAC=∠BCA, а значит ΔABC – равнобедренный, тогда высота BK является и медианой, то есть AK=KC.

ΔBCK подобен ΔDCA по двум углам, тогда BC:AD=CK:AC=1:2.

Ответ: длины оснований отличаются в два раза.

Указания. Можно использовать не подобие треугольников, а теорему Фалеса, свойства параллелограмма.

Верное решение – 7 баллов. Доказали, что высота из вершины B на диагональ является медианой - 2 балла.

3. Найдите площадь четырехугольника, все вершины которого имеют целочисленные координаты, удовлетворяющие условию $x^2+y^2=8y-6x-24$.

Решение. Преобразуем уравнение: $(x+4)^2+(y-4)^2=1$. Множество точек, заданного уравнения – окружность с центром (-3; 4) и радиусом 1. Точки с целыми координатами на окружности – только (-2;4), (-3;4), (-3;5), (-3;3).

Тогда $S=0{,}5d_1d_2=0{,}5*2*2=2$.

Ответ: 2

Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ – 0 баллов. Подбором правильно найдены четыре точки и площадь – 2 балла. Найдена окружность – 4 балла.

4. На стене висят двое часов. Первые часы идут вперед на одну минуту в каждый час. Вторые часы отстают от первых на одну минуту в час. В полдень на первых и вторых часах поставили точное время. Какое время будут показывать вторые часы через сутки?

Решение.

За 1 ч первые часы убегут на 1 минуту. Значит, скорость первых часов составляет от скорости точных часов 61/60. Скорость вторых часов составляет 59/60 скорости первых часов, а тогда по сравнению с точными $61/60 * 59/60 = 3599/3600$ – то есть за 1 час вторые часы отстают от точного времени на одну секунду. Таким образом, ровно через сутки по точным часам вторые часы будут показывать 11 ч 59 мин 36 с.

Ответ: 11 ч 59 мин 36 с.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ – 0 баллов. В решении при правильном ответе присутствуют несущественные неточности, или изложение решения слишком краткое, мало обоснованное - 4-6 баллов.

5. Крокодил Гена и Чебурашка играют в следующую игру. Есть кучка камней. Чебурашка каждым своим ходом берет либо 1, либо 5 камней. Гена каждым своим ходом берёт x или y камней. Ходят по очереди, начинает Чебурашка. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Какие значения должны принимать x и y, чтобы при любом начальном количестве камней, при любой игре Гены Чебурашка всегда мог бы играть так, чтобы выиграть?

Решение.

1) Пусть $x \leq y$ и $x < 4$. При исходной кучке из $x + 1$ камня, Чебурашка вынужден будет первым ходом взять 1 камень $(x + 1 < 5)$, после чего Гена возьмет x камней и выиграет. Противоречие.

2) Пусть $x \geq 4$ и $y = x + 4$. Снова при исходной кучке из $y + 1 = x + 5$ камней Чебурашка проигрывает, так как, если он возьмет 1 камень, то останется y камней, если он возьмет 5 камней, то останется x камней; в любом случае выиграет Гена.

3) Докажем, что при остальных значениях x и y Чебурашка выигрывает. Покажем, что при любом количестве камней в куче Чебурашка может сделать ход так, чтобы в куче осталось число камней, отличное и от x, и от y.

Пусть в куче k камней и ход Чебурашки. Если $k \leq 5$, то Чебурашка выигрывает одним ходом (беря 5 камней, если $k = 5$, или 1 камень, если $k \leq 4$).

Пусть $k > 5$. Чебурашка может оставить в куче либо $k – 1$ камень, либо $k – 5$ камней. Если бы в одном случае осталось x камней, а в другом – y камней, то $|x – y| = |k - 5 - k + 1| = 4$. Противоречие (см. пункт 2). Число камней в куче будет уменьшаться, и в итоге Чебурашка выиграет.

Ответ: $x, y \geq 4$ и $|x – y| \neq 4$.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ - 0 баллов. Рассмотрены частные случаи чисел x и y - 0 баллов. Показаны противоречия случаев 1 или 2, но нет доказательства, что все остальные значения x и y подходят (пункт 3) - 1 и 2 балла соответственно. В решении присутствуют несущественные неточности, или изложение решения слишком краткое, мало обоснованное - 4-6 баллов.