

Математика 2023-24

10 класс

Решения задач

1. Даны отрезки длины 1, 2, 3, ..., 21, 22, 23. Можно ли, используя все эти отрезки, составить куб?

Решение. У куба 12 равных ребер. Найдем сумму длин всех имеющихся отрезков: $1+2+\dots+22+23=276$ - делится на 12. Поэтому можно собрать ребра куба следующим образом: самый длинный отрезок длины 23; еще 11 таких отрезков получим, соединяя 1 и 22, 2 и 21, ..., 11 и 12.

Ответ: можно.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ - 0 баллов. Показали, что сумма длин отрезков делится на 12 - 1 балл.

2. Укажите все пары $(x; y)$, для которых выполняется равенство $(x^{2024}+1)(y^{2024}+1)=4x^{1012}y^{1012}$.

Решение. Заданное соотношение можно записать в виде $(x^{1012}y^{1012}-1)^2+(x^{1012}-y^{1012})^2=0$. Тогда $x^{1012}y^{1012}-1=0$ и $x^{1012}-y^{1012}=0$, откуда $x^{1012}y^{1012}=1$ и $x^{1012}=y^{1012}$. Значит $|x|=|y|=1$.

Ответ: $(1; 1)$, $(-1; -1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ - 0 баллов. Проведены равносильные преобразования уравнения, но потеря каких-либо решений - минус 1 балл за каждое решение.

3. Длины двух высот треугольника равны 10 см и 8 см. Какие значения может принимать длина третьей высоты?

Решение. Пусть a_1 , a_2 , a_3 – стороны треугольника, а h_1 , h_2 , h_3 – соответствующие высоты. Так как $a_1 \cdot h_1 = a_2 \cdot h_2 = a_3 \cdot h_3$, то $10a_1 = 8a_2 = a_3 \cdot h_3$. Тогда $a_1 = 0,8a_2$ и $h_3 = 10a_1/a_3 = 8a_2/a_3$. В силу неравенства треугольника $a_3 < a_1 + a_2 = 1,8a_2$, значит $h_3 > 8a_2/1,8a_2 = 8/1,8 = 40/9$.

Если $h_3 = 40/9$, то $a_3 = 9/5a_2 = a_1 + a_2$, противоречие.

Аналогично, $a_2 < a_1 + a_3$ или $a_3 > a_2 - a_1 = 0,2a_2$, значит $h_3 < 8a_2/0,2a_2 = 8/0,2 = 40$.

Если $h_3 = 40$, то $a_1 + a_3 = 0,8a_2 + 0,2a_2 = a_2$, противоречие.

Ответ: $40/9 < h_3 < 40$.

Указания. Можно использовать площадь треугольника.

Верное решение – 7 баллов. Рассмотрены частные случаи длины третьей высоты – 0 баллов. Записано равенство произведений длин сторон на высоты - 1 балл. За каждую оценку снизу или сверху по 3 балла.

4. Задана таблица:

	0		
2			
			3
		2	

Можно ли в свободные клетки таблицы вписать какие-то числа так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце стояла арифметическая прогрессия?

Решение. Пусть во второй клетке второй строки стоит число x , а в третьей клетке третьей строки - число A . Тогда заполняем вторую строку и второй столбец

	0		
2	x	$2x-2$	$3x-4$
	$2x$	A	3
	$3x$	2	

Далее будем иметь: из третьего столбца $A-2x+2=2-A$ или $2A=2x$; из третьей строки $A-2x=3-A$ или $2A=3+2x$; получаем $2x=3+2x$ – что невозможно.

Ответ: нельзя.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ – 0 баллов. В решении при правильном ответе присутствуют несущественные неточности, или изложение решения слишком краткое, мало обоснованное - 4-6 баллов.

5. На ферме живут: 6 человек (1 голова, 2 ноги), гуси (1 голова, 2 ноги, 2 крыла), козы (1 голова и 4 ноги) и пегасы (1 голова, 4 ноги и 2 крыла). Однажды несколько жителей фермы с живностью вышли на прогулку. Оказалось, что ушло $\frac{1}{3}$ всех голов, $\frac{1}{4}$ всех крыльев и $\frac{1}{5}$ всех ног. Сколько гусей и коз вместе живет на ферме?

Решение. Пусть на ферме живет суммарно a людей и гусей, из них a_1 ушло на прогулку. Пусть b – коз и пегасов вместе, из них b_1 ушло на прогулку.

1) Из подсчета голов получаем $a+b=3(a_1+b_1)$, а из подсчета ног $2a+4b=5(2a_1+4b_1)$.

2) Вычитая из второго уравнения удвоенное первое и деля на 2, получим $b=2a_1+7b_1$, а тогда $a=3a_1+3b_1-2a_1-7b_1=a_1-4b_1$. Но $a_1 \leq a$, поэтому $a=a_1$, $b_1=0$ – все гуси и люди ушли, а все козы и пегасы остались.

3) Так как $b=2a_1+7b_1$, то $b=2a$.

4) Подсчитаем крылья. Пусть было x гусей и y коз. Крыльев у оставшихся пегасов втрое больше, чем у ушедших гусей. Тогда $2x$ крыльев у гусей, $6x$ крыльев у пегасов, а самих пегасов $3x$. Тогда $b=y+3x$, $a=6+x$, но так как $b=2a$, то $y+3x=12+2x$, то есть $y+x=12$.

Ответ: 12 гусей и коз вместе.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ - 0 баллов. Рассмотрены частные случаи числа обитателей фермы - 0 баллов. Доказано, что ушли только все люди и гуси - 2 балла, доказано, что $b=2a$ (пункт 3) - 2 балла. В решении присутствуют несущественные неточности, или изложение решения слишком краткое, мало обоснованное - 4-6 баллов.