Математика 2023-24
11 класс

Решения задач

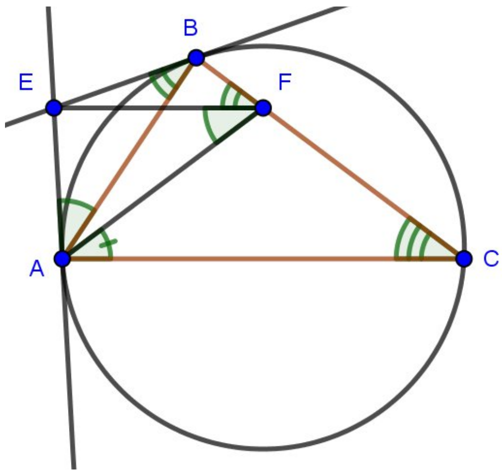
1. Решите уравнение в целых числах $\sqrt{x}+2\sqrt{y}=\sqrt{80}$.

Решение. $\sqrt{x}=\sqrt{80}-2\sqrt{y}$, возведем в квадрат $x=(\sqrt{80}-2\sqrt{y})^2=80-16\sqrt{5y}+4y$, при этом выполняются ограничения: $0\le x\le 80,\ 0\le y\le 20$.
Чтобы существовало решение в целых числах, необходимо, чтобы y=5a^2.
Тогда $0\le a^2\le 4 \Rightarrow 0\le a\le 2$, то есть a=0,1,2.
1) a=0, y=0, x=80; 2) a=1, y=5, x=20; 3) a=2, y=20, x=0.
Ответ: (80;0), (20;5), (0;20).

Указания. Верное решение – 7 баллов. Подбором найдены все или часть решений, без доказательства, что других решений нет - 1 балл.

2. К описанной окружности около треугольника ABC в точках A и B проведены касательные, пересекающиеся в точке E. На стороне BC взята точка F, не равная B и C, такая, что углы EAB и EFA равны. Докажите, что треугольник AFC - равнобедренный.

Решение.



На рисунке отмечены по условию равные углы EAB и EFA зеленым цветом, одной чертой.
1) Равны углы EAB и EBA (касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны). Угол отмечен зеленой двойной чертой
2) Покажем, что взять точку F указанным способом не возможно, если угол ACB больше или равен 90^o.
Если угол тупой, то точки C и F расположены внутри треугольника AEB. Из 1) равны углы EAB и EBA, но угол EFA больше угла EBA, если F не совпала с B.
Если угол прямой, то касательные параллельны.
3) Из 1) равны углы EBA и EFA, а значит четырехугольник AEBF - вписанный. Отсюда равны углы EAB и BFE. Углы отмечен зеленой двойной чертой.
4) Угол EAB равен половине дуги AB (по теореме об угле между касательной и хордой). Угол ACB опирается на хорду AB, значит он также равен половине той же дуги AB. Получаем, равны углы EAB и ACB. Угол отмечен зеленой тройной чертой.
5) Из пунктов 1 и 2 следует, что равны углы BFE и ACB. Отсюда следует параллельность прямых EF и AC.

6) Из пункта 4 следует, что равны углы EFA и FAC. Угол помечен зеленой перечеркнутой чертой.
7) Получаем равенства углов FAC=EFA=EAB=ACB. Значит треугольник AFC - равнобедренный.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Доказали в любом порядке: четырехугольник AEBF описанный - 2 балла, равны углы EAB и ACB - 2 балла.

3. Веревку длиной 10 метров разрезали на 13 частей. Длина каждой части не более x метров. Найти значения x, при которых из любых трех отрезанных частей веревки можно составить треугольник.

Решение.
1) По принципу Дирихле длина хотя бы одной части не меньше 10/13 метров, иначе суммарная длина всех 13-ти частей не была бы 10 метров. Поэтому минимальное значение x – это 10/13 метров.
2) При x=10/13 метров все части веревки имеют длину по 10/13 метров, что удовлетворяет условию.
3) Найдем наибольшее возможное значение x. Пусть 11 частей веревки имеют длину, равную x, тогда две оставшиеся части в сумме имеют длину $x_1+x_2=10-11x$. При этом, эта сумма должна быть больше x по неравенству треугольника, то есть 10-11x>x. Тогда x<10/12 метров.
4) При x=10/12 метров возможно разрезать веревку следующим образом: 11 частей имею длину по 10/12 метров, две части в сумме - 10/12 метров, что противоречит условию.
Ответ: $10/13 \leq x < 10/12$.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Верно и обоснованно найдена только нижняя граница - 3 балла, верно и обоснованно найдена только верхняя граница - 4 балла.

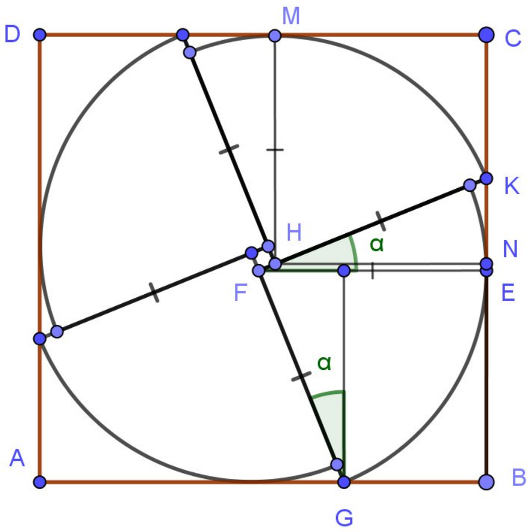
4. Чебурашка и крокодил Гена играют в игру. Сначала записали на доску взаимно простые натуральные числа x и y. Далее они дописывают на доску либо сумму любых двух из написанных чисел, умноженную на 5, либо произведение любых двух из написанных чисел, умноженное на 5. Чебурашка утверждает, что на доске можно таким образом написать квадрат натурального числа при любых начальных x и y. А Гена так не считает. Кто из них прав?

Решение. Пусть на доске изначально записаны два числа, дающие остаток 2 при делении на 3, то есть имеют вид 3m+2, 3n+2.
Покажем, что любое дописанное на доску число также будет давать остаток 2 при делении на 3. Действительно, 5(3m + 2) (3n + 2) = 45mn+30m+30n+20 = 3(15mn+10m+10n)+6)+2 и 5((3m + 2) + (3n + 2)) = 15m+15n+20 = 3(5m+5n+6)+2.
Но квадраты натуральных чисел дают остатки 0 и 1 при делении на 3:
$(3k)^2 = 3(3k^2)$; $(3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1$; $(3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$.

Ответ: прав Гена.

Указания. Могут быть использованы другие признаки, инвариантные относительно данного преобразования над числами, верно используемые и приводящие к верному решению. Могут быть использованы сравнения по модулю.
Верное решение – 7 баллов. Рассмотрены частные случаи - 0 баллов. В решении присутствуют несущественные неточности, или изложение решения слишком краткое - 4-6 баллов.

5. Можно ли вырезать из квадрата со стороной 10 см четыре куска, каждый из которых является четвертью круга радиуса 5,1 см.



Решение. Можно.
Разрежем так, как показано на рисунке. Покажем, что полученные четвертинки окружности могут иметь радиус r не меньше 5,1 см.
Установим связь между радиусом *r*, длиной стороны квадрата x и углом α.
1) FG=FE=KH=HM=r.
2) Так как FE и GT; FG и KH перпендикулярны, то равны углы KFE и FGT - угол α.
3) CN=HM=r, BE=GT=r·cosα,
KE=r·tgα, KN=r·sinα.
4) Получаем длину стороны квадрата:
x = CN - KN + KE + BE = r - r·sinα + r·tgα + r·cosα= = r(1 - sinα + tgα + cosα). При этом $0 < \alpha < 45^o$.
5) Получаем 1 - sinα + tgα + cosα = x/r = 10/5,1 =100/51 ≈ 1,9608.
Тогда - sinα + tgα + cosα = 49/51 ≈ 0,9608.
Рассмотрим функцию f(x) = - sinα + tgα + cosα.
На промежутке $0 < \alpha < 45^o$ функция f(x) непрерывна.
Так как f(0)=f(45)=1, а f(30)=$\frac{5-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}9434 < 09608$, то найдется значение угла α, при котором f(α)=0,9608. А значит r=5,1 возможно.
Схема разрезания. Если угол $\alpha=30^o$, то r·(1+0,9434)=10, тогда r = 5,14 см. Вырежем 4 четвертинки окружности с радиусом r=5,14 см, как показано на рисунке, а затем отрежем дугу шириной 0,04 см от каждой четвертинки.

Указания. При решении могут рассматриваться другие правильно составленные функции на угол или радиус четвертинок окружностей, так же исследование этих функций могут проводиться иначе. Также может проводиться исследование, связанное с построенным центральным квадратом.

Верное решение – 7 баллов. Указали схему разрезания без доказательства , что она удовлетворяет условию - 0 баллов. Указали схему разрезания, ввели угол, выделили прямоугольные треугольники - 2 балла, если дополнительно правильно составили функцию для исследования - 4 балла. В решении присутствуют несущественные неточности, или изложение решения слишком краткое - 4-6 баллов.