

Математика 2023-24

7 класс

1. У фермера есть поле треугольной формы со сторонами 2023, 2024 и 2025 метров. Фермер захотел построить забор вокруг этого поля, и поэтому собирается поставить по его периметру, начиная с углов, столбики на расстоянии 1 м друг от друга. Определите, сколько потребуется столбиков.

Ответ: 6072.

Решение:

На каждой стороне треугольного поля столбиков располагается на 1 больше, чем длина стороны в метрах. Общее число: $2024+2025+2026-3 = 6072$. Число 3 нужно отнять, так как три угловых столбика при таком подсчете учитываются дважды – сначала как столбик на одной стороне, потом как столбик на другой стороне треугольника.

Критерии:

Полное решение – 7 баллов.

Только ответ без решения и пояснений - 1 балл.

2. Трое мальчиков – Паша, Виктор и Терентий – отправились за грибами. Паша утверждает, что нашел половину всех собранных грибов, а Виктор говорит, что нашел на 11 грибов меньше, чем Паша и Терентий вместе. Возможно ли это? Ответ объясните.

Ответ: невозможно.

Решение:

Паша собрал половину всех грибов, следовательно, общее число грибов четно. С другой стороны, число грибов, собранных Виктором, и число грибов, собранных Пашей и Терентием, - разной четности, так как разность между ними равна 11, нечетному числу. А это значит, что суммарное число собранных грибов нечетно. Противоречие.

Критерии:

Полное решение – 7 баллов.

Рассмотрены только частные случаи количества грибов - 0 баллов. Показано, что общее количество грибов четно - 2 балла.

3. За круглым столом сидят несколько человек – рыцари и лжецы. На вопрос «кто Ваш сосед справа?» среди любых трех подряд сидящих, ровно двое ответили «Рыцарь», и ровно один – «Лжец». Сколько всего рыцарей сидело за круглым столом, если ответов «Лжец» прозвучало 30?

Ответ: 45.

Решение:

Так как на поставленный вопрос среди любых трех подряд сидящих, ровно двое ответили «Рыцарь», и ровно один – «Лжец», то все говорящие разбиваются на тройки: первый произносит «Рыцарь», второй произносит «Рыцарь», третий произносит «Лжец» и далее повторяется по кругу. Всего у нас 90 человек.

Выберем некоторую тройку, пронумеруем входящих в нее людей, начиная с того, кто первым сказал «Рыцарь», – первый, второй, третий. Далее занумеруем последовательно всех по кругу.

Возможны два случая:

Первый случай. Первый является рыцарем. Тогда все трое в первой тройке рыцари, а все трое во второй тройке лжецы. Возникает чередование, то есть число троек лжецов и троек рыцарей одинаково. Тогда рыцарей половина от общего числа сидящих за столом.

Второй случай. Первый является лжецом. Тогда все трое в первой тройке лжецы, а все трое во второй тройке рыцари. Снова чередование, значит рыцарей снова 45.

Критерии:

Полное решение – 7 баллов.

Только ответ - 0 баллов. Определено, что всего 90 человек - 2 балла.

4. Если к двузначному числу n прибавить сумму его цифр, получится число, кратное 3. А если от числа n отнять сумму его цифр, получится число, кратное 4. Найдите число n , если известно, что среди его делителей нет ни одного квадрата. Укажите все варианты.

Ответ: 42, 87.

Решение:

Пусть $n = \overline{ab}$. Число n и сумма его цифр дают один остаток при делении на 3. Значит, $n : 3$. В то же время $\overline{ab} - (a + b) = 9a : 4$. Так как 9 и 4 взаимно просты, $a : 4$. Число a не может быть нулем, а значит получаем такие варианты: 42, 45, 48, 81, 84, 87. Но 45 имеет делитель 9, 48 – делитель 4, 81 – делитель 9, 84 – делитель 4. Число $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $87 = 3 \cdot 29$. Эти числа не имеют делителей, являющихся квадратами.

Критерии:

Полное решение – 7 баллов.

Только ответ - 1 балл. Показано, что количество десятков a кратно 4 - 2 балла.

5. Восемь Снусмумриков и восемь Хемулей играли в чехарду на квадратном поле размером 4×4 . В какой-то момент каждый из них занял ровно одну клетку поля. Докажите, что есть либо две строки, либо два столбца поля с одинаковым количеством Снусмумриков на них.

Решение:

Предположим, что на всех строках разное количество Снусмумриков. Всего у нас может быть 5 вариантов: 0, 1, 2, 3 или 4. Сумма этих чисел 10, а Снусмумриков 8. Значит нет варианта 2, и на строках располагается 0, 1, 3 и 4 Снусмумрика. Поскольку на какой-то строке 0 Снусмумриков, то нет ни одного столбца, где могло бы быть 4 Снусмумрика. Аналогично, на какой-то строке 4 Снусмумрика, значит нет ни одного столбца, где могло бы быть 0 Снусмумриков. Значит вариантов расположения Снусмумриков на столбцах всего три: 1, 2 или 3. Поскольку у нас 4 столбца, то на каких-то двух столбцах будет одинаковое количество Снусмумриков.

Критерии:

Полное решение – 7 баллов.

Рассмотрены только частные расположения Снусмумриков - 0 баллов. Показано, что в строках или столбцах разными количествами Снусмумриков может быть 0, 1, 3, 4 - 2 балла.