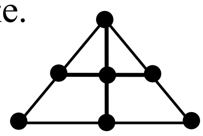
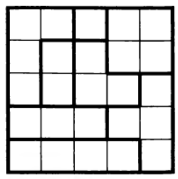
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
7 класс

1. Разложим число на простые множители: $5000=2^3 5^4$. Чтобы выиграть, Малыш должен играть первым: сначала он поделит число на 2, а потом будет повторять действия Карлсона, тогда Малыш всегда сможет поделить нацело.

2. Ответ: надо посадить кусты в точках, отмеченных на рисунке.



3. Ответ: надо разрезать по жирным линиям внутри квадрата, как показано на рисунке.



Комментарии к решению: есть и другие способы разрезания, но фигуры должны получиться такими же.

4. Пусть число всех команд равно n. Число матчей, которые сыграла данная команда на некоторый момент времени, может быть равно от 0 до n – 1, всего n вариантов. Если одна команда сыграла со всеми n – 1 командами, то никакая другая команда не могла сыграть 0 матчей. Тогда для всех n-1 команд осталось n-2 варианта числа матчей: от 1 до n-2. Так как число команд больше количества вариантов, то найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

5. Занумеруем гири 1,2,3,4,5. (Равенствами или неравенствами будем показывать сравнения весов гирь)

1) Взвесим гири 1 и 2.
- а) 1=2.
  - 2) Взвесим 3 и 4. Веса не могут быть равными.
    Пусть 3<4. (случай 3>4 симметричен)
    - 3) Взвесим 1 и 5.
      - а) 1=5, значит 3 - легкая, 4 - тяжелая.
      - б) 1<5, значит 5 - тяжелая, 3 - легкая.
      - в) 1>5, значит 5 - легкая, 4 - тяжелая.
- б) 1>2. (случай 1<2 симметричен)
  - 2) Взвесим 3 и 4.
    - а) 3=4.
      - 3) Взвесим 3 и 5.
        - а) 3=5, значит 1 - тяжелая, 2 - легкая.

б) 3>5, значит 5 - легкая, 1 - тяжелая.

в) 3<5, значит 5 - тяжелая, 2 - легкая.

б) 3<4, значит гиря 5 обычного веса.

3) Взвесим 5 и 2. Не может 2>5.

а) 2=5, значит 1 - тяжелая, 3 - легкая.

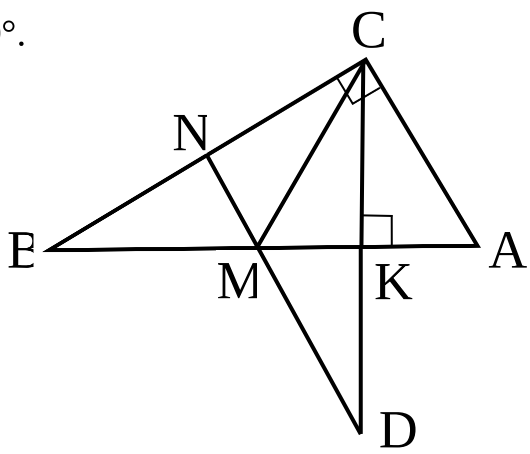
б) 2<5, значит 2 - легкая, 4 - тяжелая.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
8 класс

1. Чтобы дробь была целым числом необходимо, чтобы выполнялось условие: 4n+9= -1,1,-3,3. Тогда n= -2,-3, других значений нет.
Ответ: n= -2,-3.

2. По условию запишем уравнение, где x - указанное число: $x^2+15=y^2$, y - целое число. Преобразуем уравнение и решим его в целых числах. $y^2 - x^2=15$, (y-x)(y+x)=15. Отсюда получаем восемь систем уравнений:
1), 2) y-x=±1, y+x=±15; 3), 4) y-x=±15, y+x=±1; 5), 6) y-x=±3, y+x=±5;
7), 8) y-x=±5, y+x=±3.
Решениями этих систем являются пары: (7,8), (-7,-8), (-7,8), (7,-8), (1,4), (-1,-4), (-1,4), (1,-4).
Ответ: есть такие числа: 7,-7,1,-1.

3. Из равенств AM=MK, BN=NC следует, что MN - средняя линия треугольника ABC, значит MN || CA, значит угол MDK равен углу ACK как накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей. Треугольники ACK и MKD равны (углы MKD, AKC равны 90°, CK = KD, углы MDK, ACK равны). Значит AK = KM, тогда CM = CA. Так как MN - высота и медиана треугольника BMC, то CM=BM. Так как CM - медиана треугольника ABC, то CM=BM=MA, значит треугольник ACM - равносторонний, следовательно, угол A равен 60°, тогда угол B равен 30°.
Ответ: A=60°, B=30°.



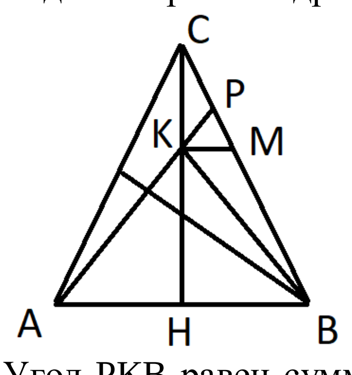
4. Обозначим производительность каждого принтера за 1 час: A - 1 принтер, B - 2 принтер, C - 3 принтер, D - 4 принтер, E - 5 принтер. Объем всей работы обозначим за 1.
Первое условие задачи: 20(A+B+C)=1, второе условие: 15(C+D+E)=1, третье условие: 10(A+B+D+E)=1.
Из двух первых уравнений: 60(A+B+2C+D+E)=7, отсюда находим C=1/120, тогда 3 принтер напечатает весь тираж за 120 часов.
Производительность всех принтеров за час: A+B+C+D+E=1/10+1/120=13/120, тогда они затратят 120/13 часов, что в 13 раз меньше, чем 3 принтер.

Ответ: в 13 раз.

5. Количество чисел - нечетное число, значит начинающий начинает и заканчивает игру, всего у него 13 ходов. Начинающий разделяет все числа на группы по остаткам от деления на 4, получается 4 группы: остатки 0,1,2,3. В группе с остатком 1 - 7 чисел, в остальных группах - по 6 чисел. Пара чисел в сумме делится на 4, если остатки от деления на 4 этих чисел в сумме дают 4 - это пары с остатками: 1 и 3, 2 и 2, 0 и 0. Начинающий вычеркивает первое число произвольно из группы 1, далее он либо уравнивает количество чисел в каждой группе с остатками 1 и 3, если такие числа есть, либо делает четным количество оставшихся чисел в группах с остатками 0 или 2. При такой игре перед его последним ходом остается 3 числа, при этом возможны следующие варианты. Либо хотя бы два из чисел относятся одновременно к группе с остатком 0 или 2, тогда он вычеркивает третье число. Либо есть пара чисел, одно из которых относится к группе с остатком 1, а второе - к группе с остатком 3, тогда он вычеркивает третье число. Начинающий выигрывает.
Ответ: Чебурашка может выиграть.

Решения задач
9 класс

1. Ответ: нет. Из трех последовательных целых чисел по крайней мере два имеют суммы цифр, являющиеся последовательными целыми числами (в данном случае возможен лишь один переход в следующий разряд). Но два последовательных целых не могут быть квадратами одновременно.
Рекомендации по оценке: только ответ – 0 баллов.
2. Пусть b – больший из двух катетов. По условию $\frac{b}{a} < 2$. Тогда:
$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2} > \frac{a^2}{b^2+a^2+b^2}+$$
$$+\frac{b^2}{a^2+a^2+b^2} >$$
$$\frac{a^2}{2b^2+a^2}+\frac{b^2}{2a^2+b^2} > \frac{1}{2\left(\frac{b}{a}\right)^2+1}+$$
$$+\frac{b^2}{2b^2+b^2} > \frac{1}{2\cdot 2+1}+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}.$$
3. Шесть команд сыграли в общей сложности 6*5/2 = 15 игр. Количество игр совпадает с суммой количеств побед, одержанных каждой командой. Но если каждая команда одержала меньше трех побед, то общее число игр не превосходит 2*6 = 12. Противоречие.
4. Ответ: да, можно. Поскольку на доске уже присутствуют числа 20 и 21, мы можем получить любое число вида 20a+21b. Заметим, что 2020 = 101*20 = (101-21)*20+21*20 = 20*80+21*20.
Рекомендации по оценке: только ответ – 0 баллов.
5. Ответ: 1:4. Так как прямая s и медиана делят высоту на три равные части, то высота точкой пересечения с медианой делится в отношении 2:1, считая от ее вершины, то есть высота из вершины C является также и медианой равнобедренного треугольника ABC (AC = BC).



Пусть прямая s пересекает высоту CH в точке K, сторону BC в точке P. Заметим, что треугольник AKB также равнобедренный. Отметим на стороне BC точку M так, что KM параллельна AB.

Угол PKB равен сумме углов KAB и KBA. Т.к. KM параллельна AB, то KM является биссектрисой угла PKB. Треугольники CKM и CHB подобны с коэффициентом 3, поэтому KM = AB/6. Поэтому треугольники

PKM и PAB подобны с коэффициентом 6, то есть PK:BK = 1:5, т.е. PM:MB = 1:5. Обозначим x=CP, y=PM. Тогда с одной стороны BM=2*(x+y), с другой BM=5y. Откуда 2x=3y, а, значит, CP:PB = x/(6y) = (3/2)/6 = 1:4.

Рекомендации по оценке:

только ответ – 0 баллов

доказано, что ABC равнобедренный – 2 балла

проведена KM, и доказано, что KM является биссектрисой угла PKB – 2 балла

Решения задач
10 класс

1. Ответ: 3. Заметим, что тройка 1, 1, 2 удовлетворяет условию. Пуст чисел больше 3. Рассмотрим любые 4 из них a, b, c, d. Среди этих четырех чисел не может быть двух четных, иначе их сумма – простое четное, большее двух. Значит по крайней мере 3 из них нечетные. Их попарные суммы – четные простые. Тогда все три рассматриваемые числа равны 1, что нарушает условие.

Рекомендации по оценке:
только ответ – 0 баллов
приведен пример для трех чисел – 2 балла.

2. Ответ: 2.5. Из условия следует, что b*c = 1. Выразим c, подставим в уравнения и найдем дискриминанты, которые должны быть положительны.

$36b^2 - \frac{4}{b} > 0, \frac{36}{b^2} - 4b > 0,$ откуда $b > \frac{1}{\sqrt[3]{9}}, b < \sqrt[3]{9}$, и те же самые ограничения будут выполнятся и для c. Одно из этих чисел является целым, а, значит, равно 1 или 2. Но если оно равно 1, то оба числа равны 1, что противоречит условию. То есть одно из этих чисел равно 2, а другое 0.5.

3. Ответ: $5^{2017} - 20$. Из условия следует, что в произведении (n+1)*…*(n+20) в разложении на простые множители степень множителя 5 равна 2020. Среди 20 последовательных чисел ровно 4 кратных 5, из них только одно может быть кратно 25 или большим степеням 5. То есть оно должно быть равно как минимум 5^{2017} . Наименьшее n, при котором такое возможно $5^{2017} - 20$.

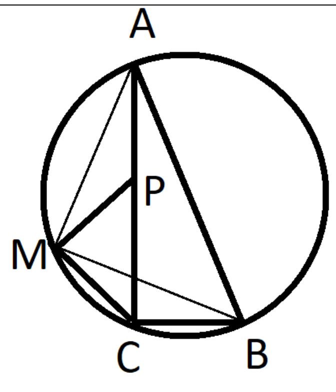
4. Ответ: нет, нельзя. Так как количество сторон многоугольника нечетно, найдется треугольник, в который входит ровно одна сторона исходного многоугольника, а две другие – равные диагонали (такие диагонали, проведенные из одной вершины, существуют, т.к. число вершин многоугольника 2021 – нечетно). Убрав этот треугольник, получим два 1011-угольника, в каждом из которых одна из сторон является диагональю исходного, то есть больше всех остальных сторон.

Указанная сторона не может быть боковой для равнобедренного треугольника, значит она также является основанием некоторого равнобедренного треугольника, боковые стороны которого – две равные диагонали (такие диагонали из одной вершины существуют, т.к. число вершин многоугольника 1011 – нечетно). Убрав этот треугольник в каждом 1011-угольнике, мы получим четыре 506-угольника, в каждом из которых одна сторона является диагональю исходного многоугольника, большей всех остальных сторон.

Эта сторона также должна быть основанием некоторого равнобедренного треугольника с боковыми сторонами – диагоналями 506-угольника. Однако 506

– четное число, поэтому в нем не существует двух равных диагоналей, проведенных из одной вершины к указанной стороне 506-угольника.

5. Ответ: 90 градусов

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>Рассмотрим треугольники APM и BCM. В них BC=AP по условию, AM=BM – хорды, опирающиеся на равные дуги, углы MBC и MAC равны, т.к. опираются на одну дугу. Следовательно, треугольники равны.</td>
</tr>
</table>

Значит, равны углы BMC и AMP. Т.к. угол AMB равен 90 градусов, то и угол PMC=AMB-AMP+BMC=90.

Рекомендации по оценке: только ответ – 0 баллов.

Решения задач
11 класс

1. Пусть $S(n)$ обозначает количество попаданий в мишень стрелка при n выстрелах. В начале стрельбы $S(n)$ составляло менее 90% от n, а к концу стрельбы – более 90%. Обязательно ли во время стрельбы был момент, когда $S(n)$ составляло ровно 90% от n?

Решение.
Предположим, что такого момента не было. Значит, для некоторого n должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{S(n)}{n} < \dfrac{9}{10}, \\ \dfrac{S(n)+1}{n+1} > \dfrac{9}{10}; \end{cases} \Rightarrow 9n-1 < 10\cdot S(n) < 9n.$$

Последняя цепочка неравенств не может выполняться ни при каких n и $S(n)$, так как между двумя последовательными целыми числами нельзя вставить целое число.
Ответ: обязательно.

Замечания по проверке. Рассмотрены только частные случаи – 0 баллов.

2. Вини-Пух запасся на зиму шоколадными батончиками: 60% от общего их числа составляли батончики «Сникерс», 30% – «Марс» и 10% – «Баунти». Весной оказалось, что количество съеденных Вини-Пухом «Баунти» составило 120% от количества съеденных батончиков «Марс» и 30% от числа съеденных «Сникерсов». Сколько всего батончиков запас на зиму Вини-Пух, если несъеденными остались 2/3 всех «Баунти» и не более 150 «Сникерсов».

Решение.
Пусть всего было $3k$ батончиков «Баунти». Тогда было $9k$ батончиков «Марс» и $18k$ «Сникерсов». Так как съедено было k батончиков «Баунти», батончиков «Марс» было съедено $\dfrac{k}{1,2}=\dfrac{5k}{6}$ штук. Поэтому k делится на 6. «Сникерсов» было съедено $\dfrac{k}{0,3}=\dfrac{10k}{3}$, а осталось $18k-\dfrac{10k}{3}=\dfrac{44k}{3}\le 150$ штук. Значит, $k\le\dfrac{450}{44}=10\dfrac{5}{22}$. Следовательно, поскольку k делится на 6, $k = 6$. Всего батончиков было $18k + 9k + 3k = 30k = 180$.
Ответ: 180.

Замечания по проверке. Угадан ответ без обоснования – 0 баллов.

3. Найти все значения параметра a, при которых в интервале $(3a;\ 5a - 2)$ содержится хотя бы одно целое число.

Решение.
Левый конец интервала должен быть меньше правого, поэтому $3a < 5a - 2 \Rightarrow a > 1$. Далее, если длина интервала больше единицы, он заведомо содержит целое число. $5a - 2 - 3a > 1 \Rightarrow a > 1{,}5.$ Таким образом, интервал $(1{,}5;\ \infty)$ входит в множество решений задачи. Рассмотрим значения $a \in (1;\ 1{,}5]$. Для них будут справедливы неравенства: $3 < 3a < 5a - 2 \le 5{,}5.$ Следовательно, целыми числами, которые могут попасть в интервал, будут 4 и 5. Поэтому должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 1 < a \le 1{,}5, \\ 3a < 4, \\ 5a - 2 > 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < a \le 1{,}5, \\ a < 4/3, \\ a > 1{,}2; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (1{,}2;\ 4/3);$$

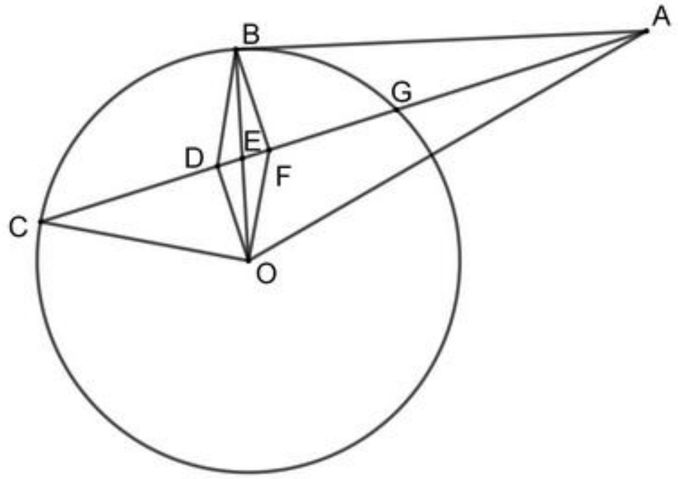
$$\begin{cases} 1 < a \le 1{,}5, \\ 3a < 5, \\ 5a - 2 > 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < a \le 1{,}5, \\ a < 5/3, \\ a > 1{,}4; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (1{,}4;\ 1{,}5].$$

Объединяя найденные множества, получаем: $a \in (1{,}2;\ 4/3) \cup (1{,}4;\ +\infty)$.
Ответ: $(1{,}2;\ 4/3) \cup (1{,}4;\ +\infty)$.

Замечания по проверке. Не рассмотрены точки 4 и 5 – 1 балл, рассмотрена одна из указанных точек – 2 балла.

4. Дана окружность радиуса R. На расстоянии $2R$ от центра окружности выбрана точка A. Из этой точки проведены касательная и секущая, причем секущая равноудалена от центра окружности и от точки касания. Найти длину отрезка секущей, заключенного внутри круга.

Решение.



Пусть O – центр окружности, B – точка касания, CG – секущая, BF и OD перпендикулярны секущей, E – точка пересечения секущей с радиусом OB. Отрезки OD и BF равны и параллельны, значит, $ODBF$ – параллелограмм и $OE = BE = \dfrac{R}{2}$. Обозначив через α угол DOE, получаем:

$OD = \dfrac{R}{2}\cos\alpha,\ CG = 2CD = 2\sqrt{OC^2 - OD^2} = R\sqrt{4-\cos^2\alpha}.$

Стороны углов *BAE* и *DOE* попарно перпендикулярны, поэтому угол *BAE* также равен α. Из прямоугольного треугольника *BAE* находим:

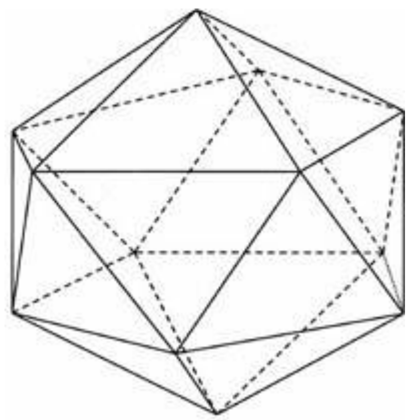
$$tg\alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{\sqrt{OA^2 - OB^2}} = \frac{R}{2\sqrt{4R^2 - R^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{12}{13},\quad CG = R\sqrt{4-\frac{12}{13}} = 2R\sqrt{\frac{10}{13}}.$$

Ответ: $2R\sqrt{\dfrac{10}{13}}.$

Замечания по проверке. Доказано, что *ODBF* – параллелограмм и установлено равенство углов *BAE* и *DOE* – 2 балла.

5. На каждой грани правильного икосаэдра написано целое неотрицательное число так, что сумма всех 20 чисел равна 39. Доказать, что существуют две различные грани, имеющие общую вершину, и на которых написаны одинаковые числа.



Икосаэдр – это выпуклый многогранник, имеющий 12 вершин, 20 граней и 30 ребер, а все грани есть одинаковые равносторонние треугольники. В каждой вершине икосаэдра сходятся 5 ребер.

Решение.

Предположим, что двух граней с общей вершиной и равными числами не найдется. Пронумеруем вершины от 1 до 12, и пусть суммы чисел на гранях, сходящихся в вершине с номером *k*, равны S_k (в каждой вершине сходятся 5 граней). Тогда, так как числа на гранях считаются по 3 раза (с каждой из трех вершин), $S_1 + S_2 + \cdots + S_{12} = 39 \cdot 3 = 117.$ $\dfrac{117}{12} < 10.$ Следовательно, найдется $S_k < 10,$ что невозможно, так как сумма пяти различных целых неотрицательных чисел не меньше $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$